

1. Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $Oxyz$  δίνονται τα σημεία  $A(2, 0, 2)$ ,  $B(0, 2, 0)$  και το επίπεδο  $(\pi) : -x + y - z + 1 = 0$ .

(i) Να βρεθεί το σημείο τομής του επιπέδου  $(\pi)$  και της ευθείας που ορίζεται από τα  $A, B$ . (ΜΟΡΙΑ 06)

(ii) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που είναι η τομή του επιπέδου  $(\pi)$  και της σφαίρας με διάμετρο  $AB$ . (ΜΟΡΙΑ 06)

(iii) Να βρείτε επίπεδο  $(\pi_1)$  που είναι παράλληλο στο  $(\pi)$  και εφάπτεται της σφαίρας με διάμετρο  $AB$ . (ΜΟΡΙΑ 06)

(iv) Σε ποιο σημείο της σφαίρας εφάπτεται το  $(\pi_1)$  που βρήκατε; (ΜΟΡΙΑ 07)

2. (i) Για τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  και  $\vec{d}$  να αποδειχθεί η σχέση

$$\langle \vec{a} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \\ \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle \end{vmatrix},$$

όπου  $\langle, \rangle$  και  $\times$  είναι, αντίστοιχα, το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. (ΜΟΡΙΑ 12)

(ii) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{b}$  που είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους. Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\vec{v} = \left( \dots \left( \left( \left( \left( \vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{b} \right) \times \vec{b} \right) \times \vec{b} \right) \dots \right) \times \vec{b},$$

όπου το  $\vec{b}$  επαναλαμβάνεται 7 φορές. Να αποδείξετε ότι

$$\vec{v} = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

(ΜΟΡΙΑ 13)

3. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $Oxyz$  στο χώρο.

(i) Να βρεθεί σφαίρα με ακτίνα 10 μονάδες μήκους, κέντρο πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon) : (x + y + z = 4, x = y + z)$  και η οποία εφάπτεται του επιπέδου  $(\pi) : 3x - 2y + 6z = 21$ . (ΜΟΡΙΑ 10)

(ii) Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζεται από τη σχέση

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy - 2yz, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

στους κύριους άξονες, τους οποίους και να προσδιορίσετε.

Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το είδος της επιφάνειας που δίνεται από τη σχέση:

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy - 2yz = -3x + 2y + z - 14.$$

Προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες του κέντρου της παραπάνω επιφάνειας στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $Oxyz$ , να τη σχεδιάσετε προσεγγιστικά. (ΜΟΡΙΑ 20)

4. (i) Υπολογίστε την απόσταση του σημείου  $P(1, -3, 4)$  από την ευθεία

$$(\zeta) : \frac{x-1}{2} = 2-y = z-3.$$

Βρείτε ακόμη το συμμετρικό του σημείου  $P$  ως προς την  $(\zeta)$ . (ΜΟΡΙΑ 10)

(ii) Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon) : \frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-8}{1}$ . Να βρεθούν οι εξισώσεις της ορθής προβολής της στο επίπεδο  $(\pi_1) : x + y + z = 0$  καθώς και στο επίπεδο  $(\pi_2) : x - y + z = 1$ . (ΜΟΡΙΑ 15)

- Απαντήσεις που δεν είναι τεκμηριωμένες δεν λαμβάνονται υπόψιν.
- Σοβαρά μαθηματικά λάθη θα επηρεάσουν αρνητικά τη βαθμολογία.

Καλή επιτυχία